Matematici speciale Inginerie electrică restanțe toamnă 2023

Note Title 8/31/2023

Subiecte

Rând II

1. Formula lui Stokes
2. $\iint_D (y-x)\,dx\,dy$, $D = \mathrm{int}\,\Delta ABC$ cu $A(2,2)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$
3. Să se integreze $x' = (x^2+1)\cdot t$, $x(0) = 1$.
4. Ecuația căldurii în bara finită.
5. Să se integreze $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$.
6. Să se determine funcția original $f(t)$ pentru care transformata Laplace este: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-5)}$.

Posibilă rezolvare a subiectelor de la rândul II

1. Formula lui Stokes

Fie S o suprafață cu două fețe, deschisă și netedă pe porțiuni

C curba frontieră a suprafeței S

sensul de parcurs al curbei C în funcție de fața aleasă a suprafeței este dat de regula burghiului

$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este un câmp de clasă C^1 pe un domeniu ce include S

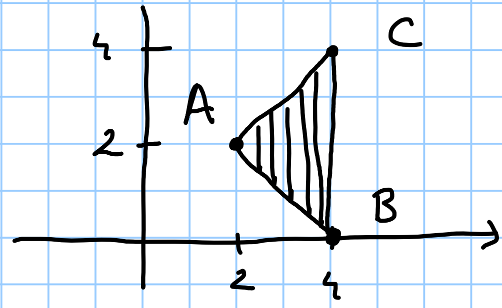
$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Atunci

$$\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\, d\sigma .$$

2. $\iint_D (y-x)\,dx\,dy$, $D = \text{int}\,\Delta ABC$ cu $A(2,2)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$

Scriem $D = \{(x,y) \mid x \in [2,4],\ y_{AB} \le y \le y_{AC}\}$



AB: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-2}{0-2}$

$\Rightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{-2} \Rightarrow (x-2)\cdot(-2) = (y-2)\cdot 2 \Rightarrow 2-x = y-2$

$\Rightarrow y = 4-x \Rightarrow y_{AB} = 4-x$

AC: $\dfrac{x-x_A}{x_C-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_C-y_A} \Rightarrow \dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-2}{4-2} \Rightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{2}$

$\Rightarrow (x-2)\cdot 2 = (y-2)\cdot 2 \Rightarrow x-2 = y-2 \Rightarrow y = x.$

$\Rightarrow \quad D: \quad x \in [2,4] \quad$ și $\quad y \in [4-x, x]$

$$\Rightarrow \iint_D (y-x)\,dx\,dy = \int_2^4 \left(\int_{4-x}^{x} (y-x)\,dy \right) dx$$

$$= \int_2^4 \left. \frac{y^2}{2} - x \cdot y \right|_{4-x}^{x} dx$$

$$= \int_2^4 \left[\frac{x^2}{2} - x^2 - \frac{(4-x)^2}{2} + x \cdot (4-x) \right] dx$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{x^2 - 16 + 8x - x^2}{2} - x^2 + 4x - x^2 \right) dx = \int_2^4 (4x - 8 - 2x^2 + 4x)\,dx$$

$$= \int_2^4 (-2x^2 + 8x - 8)\,dx = \left. -\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 8x \right|_2^4$$

$$= -\frac{2 \cdot 4^3}{3} + \frac{2 \cdot 8}{3} + 4 \cdot 16 - 4 \cdot 4 - 32 + 16 = \frac{2 \cdot 8}{3}(1 - 8) + 32 = -\frac{16}{3}.$$

3. Să se integreze $x' = (x^2+1)\cdot t$, $x(0) = 1$.

Ecuația este cu variabile separabile.

Scriem $x' = \frac{dx}{dt}$ și avem

$$\frac{dx}{dt} = (x^2+1)\cdot t \iff \frac{dx}{x^2+1} = t\,dt$$

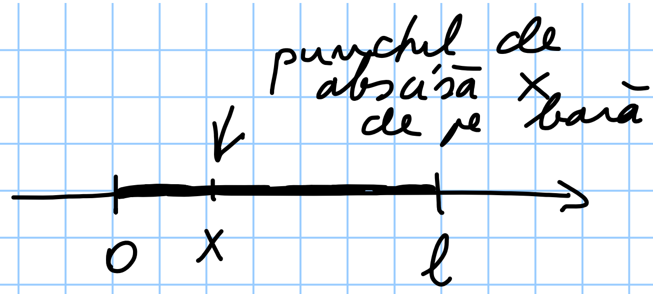
prin integrare $\Longrightarrow$ $\int \frac{dx}{x^2+1} = \int t\,dt \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{t^2}{2} + C$

$$\Rightarrow x = \operatorname{tg}\left(\frac{t^2}{2} + C\right)$$

Din condiția $x(0) = 1$ obținem $\operatorname{tg}(C) = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ soluția ecuației.

4. Ecuația căldurii în bara finită.



Fie o bară de lungime l.

$u(x,t)$ reprezintă temperatura punctului de abscisă x de pe bară la momentul de timp t

Ecuația este $u'_t = a^2 \cdot u''_{x^2}$, unde a este un parametru real.

Condiții la limită: $u(0,t) = u(l,t) = 0$ temperatura la capetele barei este menținută constantă 0.

Condiții inițiale $u(x,0) = f(x)$ distribuția temperaturii la momentul inițial

5. Să se integreze $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$.

Rezolvăm mai întâi ecuația omogenă $x'' + 3x' + 2x = 0$.

Căutăm soluții de forma $x = e^{rt}$. $\Rightarrow x' = e^{rt} \cdot r \Rightarrow x'' = e^{rt} \cdot r^2$

$$\Rightarrow \quad e^{rt} \cdot r^2 + 3 \cdot e^{rt} \cdot r + 2 \cdot e^{rt} = 0 \quad \Big| : e^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + 3r + 2 = 0 \qquad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{array} \qquad ar^2 + br + c = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \qquad \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$r_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \qquad \qquad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \text{și} \quad r_2 = \frac{-3-1}{2} = -2.$$

Soluția este $x_0 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t} = c_1 e^{-t} + c_2 \cdot e^{-2t}$

Rezolvăm ecuația neomogenă $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$.

Pentru că $f(t) = e^{-t}$ este de forma $e^{at} \cdot Q(t)$

avem că $a = -1$ $Q(t) = 1$.

Pentru că $r = a = -1$ e printre soluțiile r_1 și r_2 avem $s = 1$.

Forma soluției particulare $x_p = t^s e^{at} \cdot R(t)$ unde $R(t)$ este un polinom de același grad cu Q doar că în forma generală adică $R(t) = A$, unde A este o constantă.

$\Rightarrow$ $x_p = t \cdot e^{-t} \cdot A$

Determinăm pe A din $x_p'' + 3x_p' + 2x_p = e^{-t}$.

$$\left.\begin{array}{l} x_p' = e^{-t}A - tAe^{-t} \\ x_p'' = -e^{-t}A - Ae^{-t} + tAe^{-t} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tAe^{-t} - 2Ae^{-t} - 3tAe^{-t} + 3Ae^{-t} + 2tAe^{-t} = e^{-t} \\ \Rightarrow Ae^{-t} = e^{-t} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow x_p = te^{-t} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Soluția ecuației este $x = x_0 + x_p = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + t e^{-t}$.

6. Să se determine funcția original $f(t)$ pentru care transformata Laplace este: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s-5)}$.

$$\frac{1}{(s+2)(s-5)} = \frac{^{s-5)}A}{s+2} + \frac{^{s+2)}B}{s-5}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(s-5) + B(s+2)$$

pt $s=5 \Rightarrow 1 = B\cdot(5+2) \Rightarrow 1 = 7B \Rightarrow B = \frac{1}{7}$.

pt $s=-2 \Rightarrow 1 = A\cdot(-2-5) \Rightarrow 1 = -7A \Rightarrow A = -\frac{1}{7}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{-\frac{1}{7}}{s+2} + \frac{\frac{1}{7}}{s-5}$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{s-5}$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot \mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) + \frac{1}{7} \cdot \mathcal{L}\{e^{5t}\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{7} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{7} e^{5t}\right\}(s)$$

$$\Longrightarrow \quad f(t) = -\frac{1}{7} e^{-2t} + \frac{1}{7} e^{5t}, \quad t \geq 0.$$